Estudi d'una molla oscil·lant

Víctor Ranera
Escola Joan Pelegrí, Barcelona

En aquesta activitat pràctica ens proposem estudiar un sistema oscil·lant format per una molla penjada verticalment amb una massa subjectada a l'extrem lliure. Es tracta de treballar empíricament els conceptes estudiats en un curs introductori a la Física com ara 1r de Batxillerat. Emprarem tant sistemes de captació de dades com la mesura directa, la gestió de la informació mitjançant un full de càlcul i el desenvolupament algebraic.

Paraules clau: molla oscil·lant, conservació de l'energia, llei de Hooke

OBJECTIUS

Els objectius específics d'aquesta activitat són:

- Determinar la constant elàstica de la molla mitjançant la Llei de Hooke
- Verificar que es conserva l'energia mecànica en el sistema oscil·lant
- Analitzar el moviment oscil·latori esmorteït i veure que segueix una llei exponencial

MATERIALS

- Molla
- Consola ScienceCube Pro amb el sensor de moviment KDS-1042.
- Pes metàl·lic amb ganxo (per poder fixar-lo a la molla)
- Balança
- Cinta mètrica

FONAMENT TEÒRIC

Lleis fonamentals

La **Llei de Hooke** estableix que quan sobre una molla de constant elàstica k apliquem una força F llavors la molla experimenta un allargament x proporcional a la força. És a dir:

$$F = k \cdot x$$

Per altra banda, el **Principi de conservació de l'energia mecànica** ens diu que quan sobre un sistema només actuen forces conservatives, com ara el pes o la força elàstica, llavors l'energia mecànica es manté constant.

Conservació de l'energia mecànica per a una molla que oscil·la en un pla horitzontal sense fricció

Suposem que tenim una molla de constant elàstica k estirada horitzontalment en un pla sense fricció amb un extrem fix i l'altre lliure amb una massa m connectada. Si separem aquesta massa de la seva posició d'equilibri una distància A, llavors quan deixem que el sistema oscil·li lliurement ho farà amb una amplitud A, verificant-se que per al punt d'equilibri i a qualsevol dels extrems de les oscil·lacions:

$$E_{m\ (x=0)} = E_{m\ (x=A)}$$

que un cop desenvolupat ens queda:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} k \cdot A^2$$

Conservació de l'energia mecànica per a una molla que oscil·la en un pla vertical sense fricció

Quan les oscil·lacions es produeixen en un pla vertical llavors podríem pensar que la cosa es complica una mica per la influència que hi pugui exercir el pes. Fàcilment podríem pensar que la distància h per damunt del punt d'oscil·lació no és simètrica a l'alçada H per sota d'aquest. Però anem a demostrar que això no és pas així. Quan pengem estàticament una massa m d'una molla de constant elàstica k llavors es produeix un allargament x donat per la Llei de Hooke:

$$x = \frac{m \cdot g}{k}$$

Ara estirem cap avall la massa separant-la una distància H per sota la posició d'equilibri, tal i com indica la següent figura:

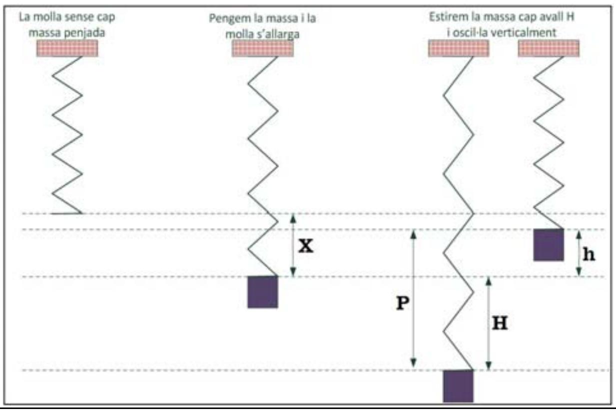

Figura 1. Les diferents situacions de la molla.

Si...

- h és l'alçada màxima per damunt del punt on la molla es trobava un cop penjada estàticament la massa
- H és la distància màxima per sota d'aquest punt
- d és la distància entre el punt més baix i el més alt ($d = H + h$)

llavors, com que l'energia mecànica es conserva,

$$E_{m\,(H)} = E_{m(h)}$$

que desenvolupat dóna lloc a:

$$\frac{1}{2}k \cdot (x+H)^2 = m \cdot g \cdot (H+h) + \frac{1}{2}k \cdot (x-h)^2$$

i que desenvolupat de nou, queda:

$$\frac{1}{2}k \cdot x^2 + \frac{1}{2}k \cdot 2 \cdot x \cdot H + \frac{1}{2}k \cdot H^2 = m \cdot g \cdot d + \frac{1}{2}k \cdot x^2 - \frac{1}{2}k \cdot 2 \cdot x \cdot h + \frac{1}{2}k \cdot h^2$$

que, eliminant-hi termes repetits i organitzant els que queden, resulta:

$$\frac{1}{2}k \cdot (H^2 - h^2) + k \cdot x \cdot (H+h) = m \cdot g \cdot d$$

i aplicant-hi allò de $(H+h) \cdot (H-h) = H^2 - h^2$, resulta

$$\frac{1}{2}k \cdot (H-h) \cdot (H+h) + k \cdot x \cdot d = m \cdot g \cdot d$$

i com que $H - h = d - h - h = d - 2 \cdot h$:

$$\frac{1}{2}k \cdot d^2 - k \cdot d \cdot h + k \cdot x \cdot d = m \cdot g \cdot d$$

aïllant h:

$$h = \frac{\frac{1}{2}k \cdot d^2 + k \cdot x \cdot d - m \cdot g \cdot d}{k \cdot d} = \frac{1}{2}d + x - \frac{mg}{k} = \frac{1}{2}d$$

que demostra que

$$h = H = \frac{d}{2}$$

Sistema elàstic esmorteït

Per altra banda, quan el sistema elàstic està sotmès a una força de fricció constant, és a dir, es tracta d'un sistema esmorteït, llavors la seva amplitud disminueix seguint una llei exponencial negativa. Matemàticament ho expressem com:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

per a un cert valor λ.

EXPERIÈNCIA 1. DETERMINACIÓ DE LA CONSTANT ELÀSTICA DE LA MOLLA

Muntatge

- Fixarem un extrem d'una molla en un suport, de manera que pengi verticalment.

- A l'altre extrem (l'inferior) penjarem objectes de diferents masses. En una taula anotarem els valors de les masses (m) que pengem i les corresponents longituds (l) que la molla assoleix.
- A partir de la representació gràfica de la força en funció de la longitud[i], determinarem el valor de la constant elàstica de la molla com el pendent de la gràfica $F(l)$, on F és el pes ($F = m \cdot g$) de les masses.

Tractament de dades

La representació gràfica de les dades recollides és la següent (fig. 2):

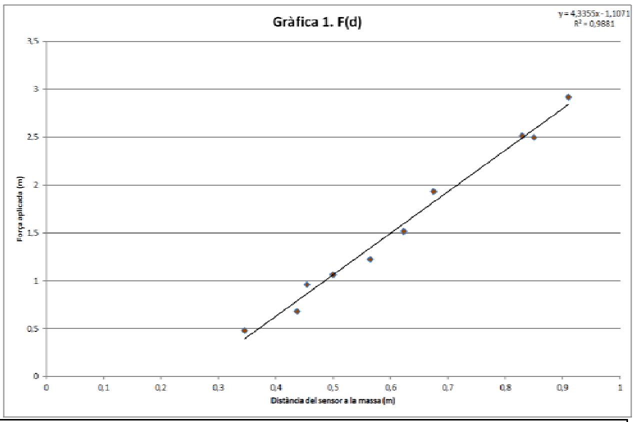

Figura 2. Gràfica de la força aplicada en funció de la distància del sensor a la massa expressada en metres.

A partir d'aquesta gràfica obtenir el valor de

$$k = 4{,}34\ N/m.$$

EXPERIÈNCIA 2. ESTUDI DE LA CONSERVACIÓ DE L'ENERGIA MECÀNICA

Muntatge

A partir del muntatge anterior,

- prendrem una pesa de massa coneguda (en el nostre cas *m = 0,1426 kg*) i la penjarem de la molla,
- col·locarem el sensor de posició just a sota de la molla. Cal fer notar que aquest sensor donarà la distància entre ell i l'objecte oscil·lant,
- el separem de la posició d'equilibri i el deixem oscil·lar lliurement, assegurant-nos que el moviment d'oscil·lació sigui només vertical,
- activem la captació de dades amb la consola ScienceCube Pro i el sensor de moviment i obtenim mesures de la posició i el temps de l'objecte oscil·lant.

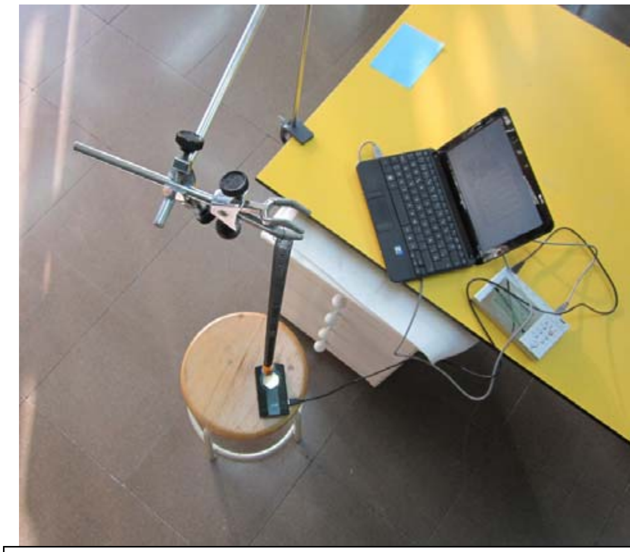

Figura 3. Muntatge de la molla amb la massa i el sensor de moviment a sota.

Tractament de dades

La representació de la posició de l'extrem de la molla en funció del temps, donada pel sistema de captació de dades és:

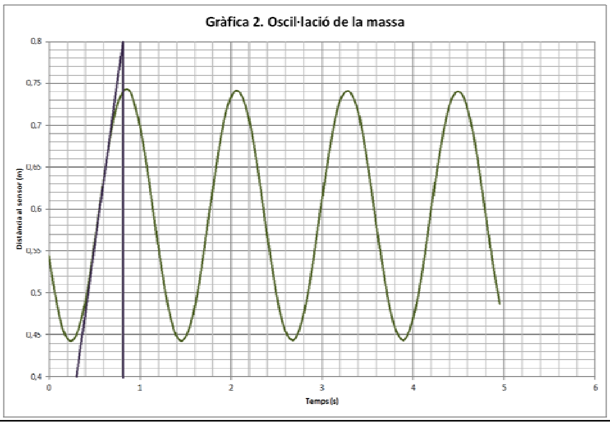

Figura 4. Gràfica de la distància al sensor (m) en funció del temps (s) per a la oscil·lació de la massa.

Anàlisi de les dades

- El punt màxim és 0,74 m i el punt més baix 0,44 m, és a dir, *d* = 0,30 m. Per tant, l'amplitud de les oscil·lacions és A = 0,15 m.

- Traçant el pendent de la gràfica en el punt central de les oscil·lacions (x = 0,59 m) obtenim la velocitat en aquest punt:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0.8\, m/s$$

A l'extrem de les oscil·lacions l'energia potencial és

$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot A^2$$

és a dir,

$$E_p = \frac{1}{2}4.34 \cdot 0.15^2 = 0.0488\, J$$

L'energia cinètica es calcula fent

$$E_c = \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

que en el centre de les oscil·lacions dóna

$$E_c = \frac{1}{2}0.1426 \cdot 0.8^2 = 0.0456\, J$$

- Comparant l'energia cinètica i l'energia veiem que els resultats són prou iguals. L'error relatiu ha estat del 6,56 %.

EXPERIÈNCIA 3. ESTUDI DEL SISTEMA ELÀSTIC ESMORTEÏT

Muntatge

Seguim amb el muntatge emprat fins ara però ara col·loquem un paper (fig. 5) a la part inferior de la pesa que oscil·la i repetim el cas anterior.

Tractament de dades

A partir de les mesures de posició i temps que ens proporciona el capturador de dades construïm la gràfica corresponent a la fig. 6.

Ara es tracta de mesurar les amplituds per a cada temps, tot anotant en una taula els temps on es produeixen crestes en aquesta darrera gràfica i, per a aquests temps, mesurar l'amplitud. Amb aquestes mesures representem en una nova gràfica (fig. 7) com varia l'amplitud amb el temps.

Figura 5. Muntatge de la molla amb la massa i el paper per friccionar amb l'aire.

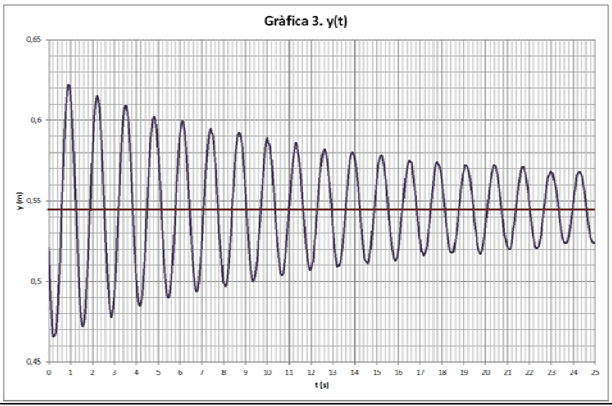

Figura 6. Gràfica de l'elongació y (m) en funció del temps (s) per a una vibració esmorteïda.

Sobre seu (fig. 7) hem traçat la línia de tendència exponencial i obtenim que l'amplitud segueix l'equació $A(t) = 0{,}075 \cdot e^{-0{,}052 \cdot t}$ (SI).

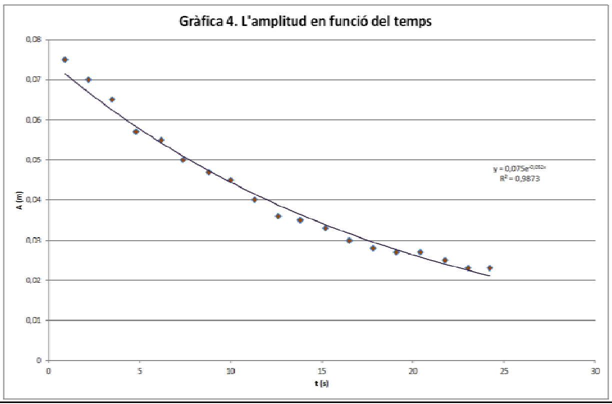

Figura 7. Gràfica de l'amplitud de la vibració A (m) en funció del temps t (s).

Això podem afirmar-ho amb contundència ja que el valor R^2 ha sortit molt alt.

CONCLUSIONS

L'alumnat de primer de Batxillerat, amb qui vaig fer aquesta activitat a l'aula, va necessitar una sessió per a l'explicació i realització de la pràctica i una altra per orientar-los en el tractament de les dades i assoliment de conclusions. L'alumnat va completar el treball amb l'elaboració d'un informe.

Aquesta activitat encara té altres aspectes per ampliar l'estudi:

- Demostrar que la freqüència de les oscil·lacions verifica

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Tenint en compte que les equacions pressuposen que la molla no té massa, es podria calcular quina fracció de la seva massa s'hauria d'afegir a la massa oscil·lant perquè l'energia mecànica es conservés. En el nostre cas ens va sortir un 20,8 % però a una massa de la molla de 0,0474 kg.

- Verificar que la freqüència de les oscil·lacions no varia al llarg del temps per al moviment oscil·latori esmorteït.

[i] La Llei de Hooke relaciona força i allargament (*F(x)*) i no longitud com aquí fem. Tot i això, no entrem en cap parany si fem la gràfica de la força aplicada en funció de la longitud total (*F(l)*) ja que calculem *k* com el pendent de la gràfica:

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{\Delta F}{((x+l_0)-l_0)} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

El que ens passarà, en tot cas, és que la recta de regressió no tallarà l'eix d'abscisses a l'origen. Per altra banda, tècnicament seria més correcte fer la gràfica *l(F)*, ja que la longitud l'obtenim a partir de la massa penjada (força aplicada). Però per als nivells que estem treballant em sembla millor fer-ho així ja que simplifica els càlculs.